(*c*) Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$, como se ha visto en (*b*), hay que demostrar que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}, B \neq 0$.

Elegido un ϵ, se debe encontrar un δ tal que

$$\text{siempre que } 0 < |x-a| < \delta \text{ se verifique } \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon.$$

$$\text{Ahora bien } \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(x)}{B\cdot g(x)}\right| = \frac{|g(x)-B|}{|B|\cdot|g(x)|} = \frac{|g(x)-B|}{|B|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}. \text{ De (ii),}$$

$$|g(x)-B| < \epsilon_2 \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta_2$$

Como la función objeto de estudio es $\dfrac{1}{g(x)}$ hay que asegurarse de que δ_2 es suficientemente pequeño para que en el intervalo $a-\delta_2 < x < a+\delta_2$ no exista una raíz de $g(x) = 0$. Sea $\delta_3 \leq \delta_2$ un valor que satisfaga a esta condición, de forma que $|g(x)-B| < \epsilon_2$ y $|g(x)| > 0$ en $0 < |x-a| < \delta_3$. Ahora bien, si $|g(x)| > 0$ en este intervalo, se verificará $|g(x)| > b > 0$ y $\dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{1}{b}$ en el mismo intervalo. Por tanto,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\epsilon_2}{|B|}\cdot\frac{1}{b} \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta_3$$

Tomando $\epsilon_2 < \epsilon b\,|B|$ y $\delta = \delta_3$, se verificará $\dfrac{\epsilon_2}{|B|\cdot b} < \epsilon$ y en consecuencia,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta$$

15. Demostrar que: (*a*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3} = \infty$, (*b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1} = 1$, (*c*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1} = \infty$.

(*a*) Elegido un M, para todos los valores de x del intervalo $0 < |x-2| < \delta$,

$$\left|\frac{1}{(x-2)^3}\right| > \frac{1}{\delta^3}. \quad \text{Por tanto } \left|\frac{1}{(x-2)^3}\right| > M \text{ cuando } \frac{1}{\delta^3} > M \text{ o bien } \delta < \frac{1}{\sqrt[3]{M}}.$$

(*b*) Elegido un ϵ, para todos los valores de x tales que $|x| > M$, $\left|\dfrac{x}{x+1} - 1\right| = \dfrac{1}{|x+1|} \leq \dfrac{1}{|x|-1} < \dfrac{1}{M-1}$.

Por tanto $\left|\dfrac{x}{x+1} - 1\right| < \epsilon$ cuando $\dfrac{1}{M-1} < \epsilon$ o $M > 1 + \dfrac{1}{\epsilon}$.

(*c*) Elegido un M suficientemente grande, para todos los valores de x tales que $|x| > P > 1$,

$$\left|\frac{x^2}{x-1}\right| \geq \frac{x^2}{|x|+1} > \frac{x^2}{2|x|} = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}P. \quad \text{Por tanto } \left|\frac{x^2}{x-1}\right| > M \text{ cuando } P > 2M.$$

Problemas propuestos

16. Estudiar el límite de $y = 2x + 1$ cuando x toma los valores de los términos de las sucesiones del Problema 1.

Sol. (*a*) $y \to 1$, (*b*) $y \to 1$, (*c*) $y \to 7$, (*d*) $y \to 7$, (*e*) $y \to 1$, (*f*) $y \to 3$

17. Calcular:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4x)$ (*e*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x^2-1}$ (*i*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

(*b*) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$ (*f*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ (*j*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$ (*g*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ (*k*) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ (*h*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ (*l*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

Sol. (*a*) -4; (*b*) 0; (*c*) $\frac{1}{2}$; (*d*) 0; (*e*) $\frac{1}{3}$; (*f*) -4; (*g*) $\frac{1}{2}$; (*h*) $\frac{1}{4}$; (*i*) 0; (*j*) ∞, no existe límite; (*k*) $3x^2$; (*l*) 2